

PENERAPAN *MULTI-AGENT MODEL PREDICTIVE CONTROL* (MPC) UNTUK OPTIMASI WAKTU HIJAU PADA JARINGAN LALU LINTAS PERKOTAAN

Nama Mahasiswa : Zendhiastara Arthananda
NRP : 1210 100 032
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Subchan, M.Sc. Ph.D
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstrak

Kemacetan adalah salah satu permasalahan yang sering dihadapi di sejumlah perkotaan. Hal ini disebabkan oleh banyaknya kendaraan tanpa ada pengaturan yang baik. Pada tugas akhir ini dibahas kontrol waktu hijau pada pengaturan lampu lalu lintas agar panjang antrian di jalanan minimal dan tidak terjadi kemacetan. Model jalan yang digunakan pada tugas akhir ini adalah model jalan 1 arah dengan 6 persimpangan dan 13 jalan yang disebut link. Metode Multi-Agent Model Predictive Control (Multi-Agent MPC), yang disebut juga MPC tersebar, digunakan untuk mengatur waktu lampu hijau pada lampu lalu lintas. Dari hasil simulasi diperoleh distribusi waktu hijau pada subsistem 3 antara 0 sampai dengan 81.9 detik.

Kata-kunci: Multi-Agent Model Predictive Control (Multi-Agent MPC), Optimasi Waktu Hijau, Quadratic Programming



"Halaman ini sengaja dikosongkan."

OPTIMIZATION OF GREEN TIME IN URBAN TRAFFIC NETWORK USING MULTI-AGENT MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC)

Name : Zendhiastara Arthananda
NRP : 1210 100 032
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Subchan, M.Sc. Ph.D
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstract

Congestion is a problem which is often encountered in the number of cities. This is caused due to the number of vehicles without good regulation. In this final project, it is discussed the green time as control of traffic lights regulation in order to minimize long queues and congestion. The model used in this final project is one-way-road model with 6 intersections and 13 roads called links. Multi-Agent Model Predictive Control, known as distributed MPC, is used to set the green time on traffic lights. In the simulation result obtained the distribution of green time in the subsystem 3 from 0 to 81.9 seconds.

Key-words: Multi-Agent Model Predictive Control (Multi-Agent MPC), Optimization of Green Time, Quadratic Programming



"Halaman ini sengaja dikosongkan."

DAFTAR SIMBOL

j	Persimpangan (<i>intersection</i>)
z	Jalan (<i>link</i>)
I_j	Jalan yang masuk menuju persimpangan j
O_j	Jalan yang keluar dari persimpangan j
$\tau_{z,w}$	Laju perputaran (<i>turning rates</i>) dinyatakan dengan kendaraan yang mencapai persimpangan j dari jalan z menuju jalan w .
C_j	Waktu siklus (<i>cycle time</i>) di persimpangan j
L_j	Waktu hilang (<i>lost time</i>) di persimpangan j
S_z	Derajat kejenuhan (<i>saturation flow</i>) dinyatakan dengan jumlah kendaraan per satuan waktu di suatu jalan (<i>link</i>) z
S_w	Derajat kejenuhan (<i>saturation flow</i>) dinyatakan dengan jumlah kendaraan per satuan waktu di suatu jalan (<i>link</i>) w
F_j	Suatu <i>phase</i> di persimpangan j
$u_{j,i}$	Waktu lampu hijau di persimpangan j pada <i>phase</i> i
Δx_z	Perubahan jumlah kendaraan di suatu jalan (<i>link</i>)
ΔT	Kontrol interval, perubahan waktu
q_z	Aliran masuk ke <i>link</i> z
c_z	Aliran keluar jaringan pada <i>link</i> z
p_z	Aliran keluar dari <i>link</i> z
d_z	Aliran masuk jaringan pada <i>link</i> z
e_z	Gangguan (<i>disturbance</i>) pada <i>link</i> z
A	Matriks keadaan berdimensi $n \times n$
B	Matriks kendali/inputan berdimensi $m \times n$
$u(t)$	Vektor kendali yang mengandung sinyal waktu lampu hijau $u_{j,i}$
\bar{x}_m	Matriks keadaan local di suatu subsistem

G	Menyatakan Graf berarah
V	Menyatakan simpul (<i>vertex</i>)
E	Menyatakan sisi (<i>edge</i>)
Φ_m	Fungsi objektif
$\bar{x}_m(t + k)$	Prediksi state dari subsistem m saat $t+k$
M	Subsistem pada model
\bar{u}_m	Prediksi sinyal kendali dari subsistem m
Q_m	Bobot untuk vektor keadaan berbentuk matriks semidefinit positif
R_m	Bobot untuk vector kendali berbentuk matriks definit positif
C_m	Matriks bersesuaian dengan <i>constraint</i> pertaksamaan
c_m	Vektor bersesuaian dengan <i>constraint</i> pertaksamaan
D_m	Matriks bersesuaian dengan <i>constraint</i> persamaan
d_m	Vektor bersesuaian dengan <i>constraint</i> persamaan
K	Waktu horizon (<i>horizon time</i>)
\bar{A}_m	Matriks input keadaan pada subsistem m
\bar{B}_m	Matriks input kendali pada subsistem m
\bar{Q}_m	Matriks bobot vektor keadaan pada subsistem m
\bar{R}_m	Matriks bobot vektor kendali pada subsistem m
$I(m)$	Himpunan input tetangga dari suatu subsistem m
$\bar{I}(m)$	Himpunan output tetangga dari suatu subsistem m
$P_m(t)$	Fungsi objektif local dari suatu subsistem
H	Matriks hessian
H_m	Matriks hessian di suatu subsistem

DAFTAR NOTASI

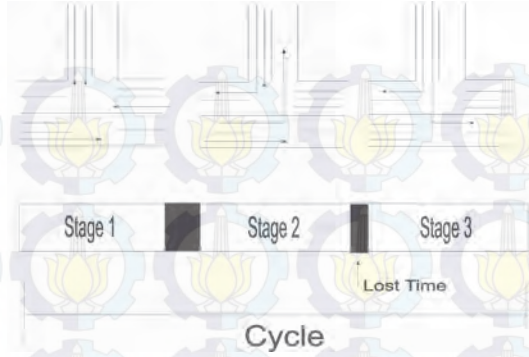
$=$	Sama dengan
$<$	Kurang dari sama dengan
$>$	Lebih besar sama dengan
\in	Elemen dari
\sum	sigma
\cup	Gabungan

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Jaringan Lalu Lintas Perkotaan

Sebuah jaringan perkotaan [7] terdiri dari interseksi atau persimpangan yang bergabung dengan jalan yang mewakili jalan raya atau sebarang infrastruktur yang menggabungkannya. Sebuah persimpangan terdiri atas himpunan jalan yang berakhir pada suatu titik yang sama. Sebuah jalan adalah himpunan bagian dari jalanan kecil dari sebuah *link* dimana kendaraan dapat melintasi sebuah persimpangan secara simultan. Sebuah *stage* adalah periode waktu selama dimana sinyal lampu lalu lintas terjadi. Aliran maksimum dimana sebuah kendaraan dapat melintasi jalan dari sebuah persimpangan ketika jalanan memiliki hak untuk melintas disebut derajat kejenuhan (*saturation flow*) dimana dinyatakan dengan kendaraan per satuan waktu. Lama lampu kuning diantara *phase* yang berurutan untuk menjamin keamanan disebut waktu hilang (*lost time*) . Perulangan dari *stage* disebut waktu siklus (*cycle time*).

Gambar 2.1 menunjukkan sebuah jaringan lalu lintas perkotaan dengan dua jalan dan masing-masing memiliki empat jalur. Dipilih *link* secara horisontal pada arah barat-timur sebagai acuan. Satu menunjukkan dua jalan yang berbeda. Sekelompok kendaraan ingin berbelok ke kiri dan sekelompok lainnya ingin melaju lurus. Tanda panah menunjukkan seluruh aliran dalam jaringan jalan. Gambar tersebut juga menunjukkan tiga *stage* dari persimpangan yang diulang setiap siklus.



Gambar 2.1: Model Jaringan Lalu Lintas Perkotaan[7]

Sebuah jaringan lalu lintas perkotaan dipandang sebagai graf berarah yang simpulnya dinyatakan sebagai persimpangan $j \in J$ dan belokannya mewakili jalan $z \in Z$. Himpunan I_j dan O_j secara berurutan adalah jalan yang masuk dan keluar dari persimpangan j . Rute kendaraan yang masuk ke jaringan dimodelkan dengan *turning rates*. Secara spesifik, laju perputaran (*turning rates*) $\tau_{z,w}$ menambah laju kendaraan yang mencapai persimpangan j dari jalan $z \in I_j$ dan berbelok ke jalan $w \in O_j$. Untuk memperoleh tujuan analisis kendali lalu lintas, laju perputaran (*turning rates*) $\tau_{z,w}$, waktu siklus C_j , waktu hilang (*lost time*) L_j pada saat di persimpangan dan derajat kejenuhan S_z dinyatakan konstan.

Diberikan F_j adalah himpunan *phase* di persimpangan j dimana $u_{j,i}$ menotasikan waktu lampu hijau dari *phase* $i \in F_j$. Secara khusus setiap persimpangan menjalankan waktu siklus C yang sama dimana dijalankan dengan *constraint* $\sum_{i \in F_j} u_{j,i} + L_j = C$.

Aliran dinamis lalu lintas dari jaringan berdasarkan Gambar 2.2 diberikan[7]:

$$\Delta x_z(t+1) = \Delta T(q_z(t) + d_z(t) - p_z(t) - c_z(t)) \quad (2.1)$$

dimana

ΔT = kontrol interval

x_z = jumlah kendaraan di *link* z

q_z = aliran masuk ke *link* z

c_z = aliran keluar

p_z = aliran keluar dari *link* z

d_z = permintaan (*demand*), yang dinyatakan dengan kendaraan yang tidak berasal dari *link* yang berdekatan yang masuk ke dalam jaringan.



Gambar 2.2: Aliran Dinamis Lalu Lintas[7]

Karena laju perputaran (*turning rates*) diketahui, maka aliran lalu lintas menuju *link* z dinyatakan sebagai berikut:

$$q_z = \sum_{w \in I_{j_1}} \tau_{w,z} p_w(t) \quad (2.2)$$

dimana $\tau_{w,z}$ adalah laju perputaran terhadap *link* $z \in O_{j_1}$ yang datang dari *link* $w \in I_{j_1}$. Permintaan d_z dan aliran keluar c_z disatukan menjadi sebuah gangguan (*disturbance*), sebut saja e_z . Dengan mengasumsikan bahwa aliran masuk dan aliran keluar dari *link* z dengan hak untuk berjalan sama dengan derajat kejenuhan S_z , maka persamaan (2.1) menjadi:

$$x_z(t+1) = x_z(t) + \Delta T \left[\sum_{w \in I_{j_1}} \tau_{w,z} \frac{S_w}{C} \sum_{i \in V_w} u_{j_1,i}(t) - \frac{S_z}{C} \sum_{i \in V_z} u_{j_2,i}(t) + e_z \right] \quad (2.3)$$

dimana $u_{j_1,i}(t)$: kontrol sinyal waktu hijau untuk kendaraan melalui persimpangan j_1 selama *phase* i

$\sum_{i \in V_z} u_{j_2,i}(t)$: waktu hijau untuk kendaraan yang meninggalkan *link* z

dengan catatan bahwa *link* z dimulai dari persimpangan j_1 dan berakhir di j_2 .

Menggeneralisasikan persamaan (2.3) untuk semua jaringan *link* ke dalam matriks dengan persamaan:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + e(t) \quad (2.4)$$

dimana:

$x(t)$: vektor *state*

A : matriks *state*

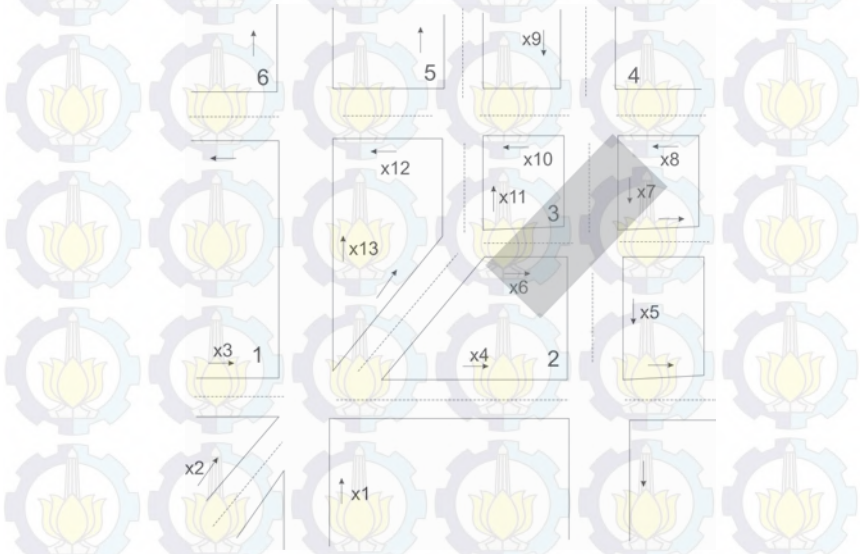
B : matrik kontrol

$u(t)$: vektor kontrol yang mengandung sinyal $u_{j,i}(t)$

$e(t)$: vektor gangguan

2.2 Model Jaringan Lalu Lintas

Model yang digunakan pada penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut [7]:



Gambar 2.3: Model Jalan[7]

Pada gambar diatas dapat dilihat bahwasanya model jaringan lalu lintas yang digunakan pada usulan Tugas akhir ini terdapat 6 persimpangan atau *intersection* yang dinotasikan dengan angka dan 13 jalan satu arah atau *links* yang dinotasikan dengan $x_i | i = 1, \dots, 13$. Dan daerah yang diamati yaitu disekitar persimpangan nomor 3.

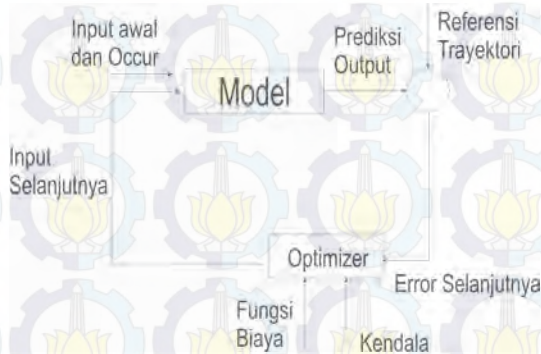
2.3 Model Predictive Control (MPC)

Model Predictive Control atau MPC adalah suatu metode proses *control* lanjutan yang banyak diterapkan pada proses industri. Dari sekian banyak algoritma *multivariable control*, MPC adalah salah satunya.

Lima konsep yang dikenal di dalam MPC yaitu[2]:

1. Model proses dan *disturbance*
2. *Performance index*
3. Pengendalian/penanganan *constraint*
4. Optimalisasi
5. *Receding horizon principle*

Metode MPC dijelaskan di bawah ini:

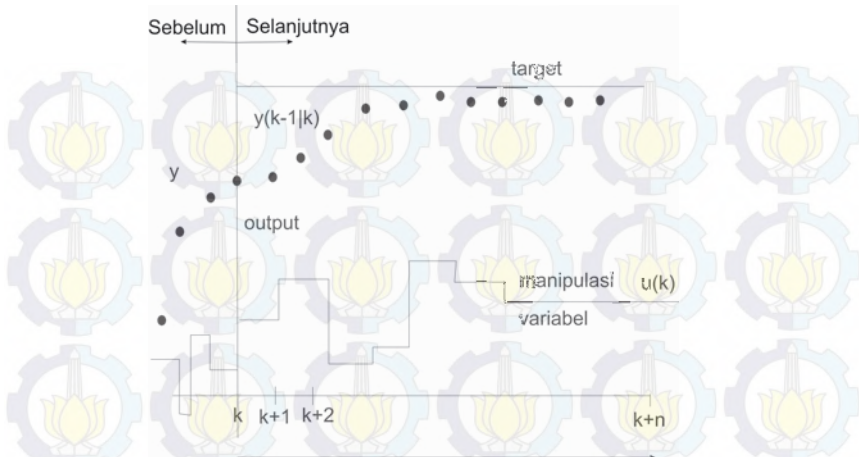


Gambar 2.4: Struktur Dasar MPC[2]

Langkah kerja dari MPC seperti yang terlihat pada Gambar 2.4 dapat diilustrasikan sebagai berikut: awalnya, sistem telah memiliki model dari *plant*. Data *input* dan *output* sebelumnya masuk melalui *port input* MPC. Dari *input* dan *output* ini dilakukan estimasi berdasarkan model *plant* yang telah didefinisikan sebelumnya. Estimasi ini menghasilkan *output* yang disebut *predicted output* yang kemudian nilainya dibandingkan dengan *reference trajectory*. Dari hasil perbandingan ini, akan menghasilkan kesalahan yang disebut *future error*. *Future error* ini kemudian masuk ke dalam blok *optimizer*. Di sini, *optimizer* berfungsi untuk bekerja di dalam rentang *constraint* yang telah diberikan dengan tujuan untuk meminimalkan *cost function*, yang merupakan fungsi kriteria yang dibentuk dari fungsi kuadratik kesalahan antara sinyal *predicted output* dengan *reference trajectory*.

MPC kemudian mengambil keputusan untuk meminimalkan *future error* tersebut dengan keputusan yang masih berada dalam *constraint* yang telah ditetapkan. Hasil dari blok ini disebut *future input* yang dikembalikan bersama-sama dengan data *input* dan output sebelumnya untuk diestimasi kembali. Perhitungan ini berlangsung seterusnya dan berulang-ulang. Karena adanya koreksi *input* berdasarkan output terprediksi inilah yang membuat MPC mampu bekerja menghasilkan respon yang semakin mendekati *reference trajectory*.

Keluaran proses dan pengendali terprediksi pada MPC menggunakan konsep *prediction horizon* yaitu seberapa jauh prediksi kedepan yang diharapkan. Hal ini dapat diilustrasikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Kalkulasi Keluaran Proses dan Pengendali Terprediksi[2]

Gambar 2.5 menunjukkan respon sistem saat diberi pengendali MPC. Dapat dilihat bahwa respon mampu menghasilkan nilai yang semakin baik, hal ini dikarenakan sinyal kendali yang mengalami perubahan setiap waktu berdasarkan *error* yang terjadi[2] .

2.4 Quadratic Programming (QP)

Quadratic Programming atau dalam Bahasa Indonesia dikenal sebagai program kuadratik adalah suatu bentuk model matematika yang sangat populer. Program kuadratik berarti suatu perencanaan dari beberapa aktivitas untuk memperoleh hasil yang optimal.

2.4.1 Formulasi Masalah

Program kuadratik dapat dirumuskan dengan mengasumsikan $x \in \mathbb{R}^n$, x dan c adalah vektor kolom dengan n elemen ($n \times 1$ matriks) dan Q adalah simetris ($n \times$

n matriks)

$$\text{Meminimasi : } f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \quad (2.5)$$

Kendala :

$Ax \leq b$ (*constraint pertaksamaan*)

$Ex = d$ (*constraint persamaan*)

dimana x^T menunjukkan vektor tranpose dari x .

2.5 *Multi-Agent Model Predictive Control (Multi-Agent MPC)*

Multi-Agent Model Predictive Control adalah sebuah kendali prediktif tersebar dimana memecah permasalahan optimasi statis menjadi subsistem yang lebih kecil untuk diselesaikan oleh *agent*. Ini bertujuan untuk menyelesaikan sub-masalah dalam bentuk paling sederhana ketika performa akhir berjalan.

2.5.1 Definisi Umum

Pada umumnya *Multi-Agent MPC* [7] diasumsikan bahwa sistem yang terkontrol dapat dibagi menjadi sub-sistem dan setiap *agent* telah ditugaskan pada setiap sub-sistem. Setiap *agent* menggunakan MPC untuk menentukan tindakan.

Formulasi MPC menggunakan konsep jaringan dinamis linier yang memodelkan aliran lalu lintas dinamis. Ini juga menunjukkan formulasi tersebar untuk jaringan dinamis linier yang menggeneralisasi formulasi MPC dan suatu dekomposisi dari masalah MPC, tetapi sub-sistem masalah yang diselesaikan secara iterasi oleh jaringan *agent*.

2.5.2 Formulasi *Model Predictive Control* (MPC)

Jaringan dinamis dari aliran lalu lintas diperoleh dari pendekatan model *store-and-forward* [5][6] ditunjukkan oleh sebuah sistem dari M inter-koneksi sub-sistem yang

membentuk sebuah graf berarah $G = (V, E)$ dimana sub-sistem adalah simpul di V dan setiap belokan $(i, j) \in E$ mendefinisikan sebuah pasangan sub-sistem i dan j dimana sinyal kontrol sub-sistem i mempengaruhi secara langsung sub-sistem j . Dan didefinisikan *state* lokal $x_m \in R^{n_m}$ dan kontrol lokal $u_m \in R^{n_m}$

$$\mathbf{x}_m(t+1) = A_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \mathbf{u}_i(t) \quad (2.6)$$

dimana $I(m) = m \cup i : (i, m) \in E$ adalah himpunan input tetangga dari sub-sistem m . *State* jaringan adalah $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ dan vektor kontrolnya adalah $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$.

MPC mendapatkan sinyal kontrol untuk waktu t dengan menyelesaikan masalah *Quadratic Programming* (QP)[7]:

$$P(t) : \min \sum_{m=1}^M \Phi_m = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{x}}_m(t+k)' Q_m \bar{\mathbf{x}}_m(t+k) + \bar{\mathbf{u}}_m(t+k-1)' R_m \bar{\mathbf{u}}_m(t+k-1)] \quad (2.7)$$

Kendala:

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{x}_m(t); m \in M \quad (2.8)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t+k+1) = A_m \bar{\mathbf{x}}_m(t+k) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+k), m \in M, k \in K \quad (2.9)$$

$$C_m \bar{\mathbf{u}}_m(t+k) \geq c_m, m \in M, k \in K \quad (2.10)$$

$$D_m \bar{\mathbf{u}}_m(t+k) = d_m, m \in M, k \in K \quad (2.11)$$

dengan

$\bar{\mathbf{x}}_m(t+k)$: prediksi *state* dari sub-sistem m saat $t+k$

$\bar{\mathbf{u}}_m$: prediksi sinyal kontrol

Q_m : bobot untuk *state vector* berbentuk matriks semi-definit positif

R_m : bobot untuk *control vector* berbentuk matriks definit positif

C_m : matriks dan c_m adalah sebuah vektor bersesuaian dengan *constraint* pertaksamaan

D_m : matriks dan d_m adalah sebuah vektor bersesuaian dengan *constraint* persamaan

M : 1, .. , M adalah himpunan yang menandakan sub-sistem

K : 0, .. , K-1 adalah waktu horizon

2.5.3 Formulasi Kompak

Selanjutnya diberikan [3] *state prediction* dari subsistem m pada saat $t+k$ adalah fungsi keadaannya pada saat t dan sinyal kendalinya atas waktu $t+k$ adalah :

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t+k) = A_m^k \mathbf{x}_m(t) + \sum_{l=1}^K \sum_{i \in I(m)} A_m^{l-1} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+k-l) \quad (2.12)$$

Diberikan $\bar{\mathbf{x}}_m$ adalah variabel prediksi *state* dan $\bar{\mathbf{u}}_m$ adalah kontrol atas waktu horizon.[3][7]

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m(t+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m(t+K) \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{\mathbf{u}}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_m(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(t+K-1) \end{pmatrix}$$

Diberikan juga matriks A dan B secara berturut-turut adalah input keadaan dan input kontrol [3].

$$\bar{A}_m = \begin{pmatrix} A_m \\ A_m^2 \\ \vdots \\ A_m^K \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{B}_{mi} = \begin{pmatrix} B_{mi} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_m B_{mi} & B_{mi} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A_m^{K-1} B_{mi} & A_m^{K-2} B_{mi} & A_m^{K-3} B_{mi} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga persamaan prediksi *state* diperoleh menjadi:

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t) = \bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} \bar{B}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \quad (2.13)$$

Diberikan matriks $\bar{Q}_m = I \times Q_m$ dan $\bar{R}_m = I \times R_m$ merupakan bobot.

$$\bar{Q}_m = \begin{pmatrix} Q_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_m \end{pmatrix}$$

dan $\bar{R}_m = \begin{pmatrix} R_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_m \end{pmatrix}$

Fungsi objektif ϕ_m dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}_m' \bar{Q}_m \bar{\mathbf{x}}_m + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \bar{\mathbf{u}}_m \\ &= \frac{1}{2} [[\bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} \bar{B}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i]' \bar{Q}_m [\bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} \bar{B}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i]] \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \bar{\mathbf{u}}_m\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_m(t)' \bar{A}_m' \bar{Q}_m \bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} \mathbf{x}_m(t)' \bar{A}_m' \bar{Q}_m \bar{B}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} \bar{\mathbf{u}}_i' \bar{B}_{mi}' \bar{Q}_m \bar{B}_{mj} \bar{\mathbf{u}}_j + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \bar{\mathbf{u}}_m\end{aligned}\quad (2.15)$$

Lalu mendefinisikan:

$$g_{mi} = \bar{B}_{mi}' \bar{Q}_m \bar{A}_m \mathbf{x}_m \text{ untuk } i \in I(m) \quad (2.16)$$

$$H_{mij} = \bar{B}_{mi}' \bar{Q}_m \bar{B}_{mj} \text{ untuk } i, j \in I(m), i \neq m \text{ atau } j \neq m \quad (2.17)$$

$$H_{mmm} = \bar{B}_{mm}' \bar{Q}_m \bar{B}_{mm} + \bar{R}_m \quad (2.18)$$

$$c(t) = \sum_{m \in M} \frac{1}{2} \mathbf{x}_m(t)' \bar{A}_m' \bar{Q}_m \bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) \quad (2.19)$$

Sehingga P dapat dinyatakan menjadi:

$$\begin{aligned}P(t) : \min & \frac{1}{2} \sum_{m \in M} \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} \bar{u}_i(t)' H_{mij} \bar{u}_j + \sum_{m \in M} \sum_{i \in I(m)} g_{mi}' \bar{u}_i(t) + c(t) \\ & (2.20)\end{aligned}$$

Kendala :

$$\bar{C}_m \bar{u}_m \geq \bar{c}_m, \quad m \in M$$

$$\bar{D}_m \bar{u}_m = \bar{d}_m, \quad m \in M$$

dimana $\bar{C} = I \times C_m$, $\bar{D} = I \times D_m$ dan $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M)$



"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB III

METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan pemahaman teori mengenai jaringan lalu lintas perkotaan serta metode *Multi-Agent Model Predictive Control* dengan mencari referensi yang menunjang penelitian melalui buku, jurnal, tugas akhir, *paper* maupun artikel dari internet.

2. Mengkaji Model Matematika serta Menyelesaikan Masalah Optimasi

Pada tahap ini dikaji model matematika pada jaringan lalu lintas perkotaan dengan menjabarkan model hingga diperoleh matriks *state space*. Selanjutnya dicari penyelesaian permasalahan dari optimasi dan dekomposisi pada jaringan lalu lintas perkotaan sehingga diperoleh kendali waktu hijau yang optimal pada suatu subsistem pada jaringan lalu lintas perkotaan.

3. Menganalisis, Membuat Simulasi serta Menganalisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dibahas analisis dari penjabaran model jaringan lalu lintas perkotaan, masalah kendali optimal serta formulasi dekomposisi. Selanjutnya dibuat simulasi berdasarkan model untuk mendapatkan waktu

hijau yang optimal menggunakan *software* MATLAB 2010. Selanjutnya menganalisis hasil simulasi yang dihasilkan.

4. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini ditarik kesimpulan berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh serta diberikan saran dan masukan untuk penelitian selanjutnya.

5. Penulisan Laporan Tugas Akhir

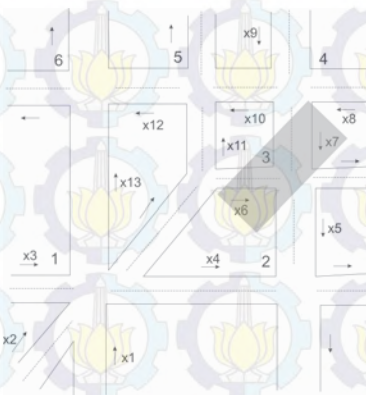
Pada tahap ini disusun buku sebagai bahan dokumentasi dari pengerjaan Tugas Akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas penyelesaian secara analisis dari sistem optimasi lampu hijau pada jaringan lalu lintas perkotaan menggunakan *Model Predictive Control (MPC)*, kemudian sistem optimasi tersebut disimulasikan dengan menggunakan *software* MATLAB.

4.1 Analisis Model Jaringan Lalu Lintas

Dalam Tugas Akhir ini model jaringan lalu lintas perkotaan yang digunakan direpresentasikan ke dalam gambar sebagai berikut:



Gambar 4.1: Model Jalan[7]

Pada gambar diatas dapat dilihat bahwasanya model jaringan lalu lintas yang digunakan pada Tugas Akhir ini

terdapat 6 persimpangan atau *intersection* yang dinotasikan dengan angka dan 13 jalan satu arah (*one-way road*) atau *links* yang dinotasikan dengan x_1, x_2, \dots, x_{13} . Dan daerah yang diamati yaitu di sekitar persimpangan nomor 3.

Persamaan yang digunakan untuk menganalisis model jaringan lalu lintas adalah sebagai berikut :

$$x_z(t+1) = x_z(t) + \Delta T \left[\sum_{w \in I_{j_1}} \tau_{w,z} \frac{S_w}{C} \sum_{i \in V_w} u_{j_1,i}(t) - \frac{S_z}{C} \sum_{i \in V_z} u_{j_2,i}(t) + e_z \right] \quad (4.1)$$

dimana $u_{j_1,i}(t)$: kontrol sinyal waktu hijau untuk kendaraan melalui persimpangan j_1 selama *phase i*

$\sum_{i \in V_z} u_{j_2,i}(t)$: waktu hijau untuk kendaraan yang meninggalkan *link z*

dengan catatan bahwa *link z* dimulai dari persimpangan j_1 dan berakhir di j_2 .

Dengan menggunakan persamaan 2.2 akan dicari *state* di masing-masing *link*. Dengan menginputkan $z = 1, \dots, 13$ maka diperoleh

Untuk *link 1* dengan $z = 1$

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + \Delta T \left[\sum_{w=1} \tau_{w,1} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=1} u_{1,i}(t) - \frac{S_1}{C_1} \sum_{i=1} u_{1,i}(t) \right] \\ &= x_1(t) + \Delta T \left[\tau_{1,1} \frac{S_1}{C_1} u_{1,1}(t) - \frac{S_1}{C_1} u_{1,1}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Untuk *link* 2 dengan $z = 2$

$$\begin{aligned}
 x_2(t+1) &= x_2(t) + \Delta T \left[\sum_{w=2} \tau_{w,2} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=2} u_{1,i}(t) - \frac{S_2}{C_1} \sum_{i=2} u_{1,i}(t) \right] \\
 &= x_2(t) + \Delta T \left[\tau_{2,2} \frac{S_2}{C_1} u_{1,2}(t) - \frac{S_2}{C_1} u_{1,2}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Untuk *link* 3 dengan $z = 3$

$$\begin{aligned}
 x_3(t+1) &= x_3(t) + \Delta T \left[\sum_{w=3} \tau_{w,3} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=3} u_{1,i}(t) - \frac{S_3}{C_1} \sum_{i=3} u_{1,i}(t) \right] \\
 &= x_3(t) + \Delta T \left[\tau_{3,3} \frac{S_3}{C_1} u_{1,3}(t) - \frac{S_3}{C_1} u_{1,3}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Untuk *link* 4 dengan $z = 4$

$$\begin{aligned}
 x_4(t+1) &= x_4(t) + \Delta T \left[\sum_{w=1,2,3} \tau_{w,4} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=1,2,3} u_{1,i}(t) - \frac{S_4}{C_2} \sum_{i=1} u_{2,i}(t) \right] \\
 &= x_4(t) + \Delta T \left[\tau_{1,4} \frac{S_1}{C_1} u_{1,1} + \tau_{2,4} \frac{S_2}{C_1} u_{1,2} + \tau_{3,4} \frac{S_3}{C_1} u_{1,3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_4}{C_2} u_{2,1}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Untuk *link* 5 dengan $z = 5$

$$\begin{aligned}
 x_5(t+1) &= x_5(t) + \Delta T \left[\sum_{w=6,7} \tau_{w,5} \frac{S_w}{C_3} \sum_{i=1,2} u_{3,i}(t) - \frac{S_5}{C_2} \sum_{i=2} u_{2,i}(t) \right] \\
 &= x_5(t) + \Delta T \left[\tau_{6,5} \frac{S_6}{C_3} u_{3,1} + \tau_{7,5} \frac{S_7}{C_3} u_{3,2}(t) - \frac{S_5}{C_2} u_{2,2}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Untuk *link* 6 dengan $z = 6$

$$\begin{aligned}
 x_6(t+1) &= x_6(t) + \Delta T \left[\sum_{w=1,2,3} \tau_{w,6} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=1,2,3} u_{1,i}(t) - \frac{S_6}{C_3} \sum_{i=1} u_{3,i}(t) \right] \\
 &= x_6(t) + \Delta T \left[\tau_{1,6} \frac{S_1}{C_1} u_{1,1}(t) + \tau_{2,6} \frac{S_2}{C_1} u_{1,2}(t) + \tau_{3,6} \frac{S_3}{C_1} u_{1,3}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_6}{C_3} u_{3,1}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Untuk *link* 7 dengan $z = 7$

$$\begin{aligned}
 x_7(t+1) &= x_7(t) + \Delta T \left[\sum_{w=8,9} \tau_{w,7} \frac{S_w}{C_4} \sum_{i=1,2} u_{4,i}(t) - \frac{S_7}{C_3} \sum_{i=2} u_{3,i}(t) \right] \\
 &= x_7(t) + \Delta T \left[\tau_{8,7} \frac{S_8}{C_4} u_{4,1}(t) + \tau_{9,7} \frac{S_9}{C_4} u_{4,2}(t) - \frac{S_7}{C_3} u_{3,2}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Untuk *link* 8 dengan $z = 8$

$$\begin{aligned}
 x_8(t+1) &= x_8(t) + \Delta T \left[\sum_{w=8} \tau_{w,8} \frac{S_w}{C_4} \sum_{i=1} u_{4,i}(t) - \frac{S_8}{C_4} \sum_{i=1} u_{4,i}(t) \right] \\
 &= x_8(t) + \Delta T \left[\tau_{8,8} \frac{S_8}{C_4} u_{4,1}(t) - \frac{S_8}{C_4} u_{4,1}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Untuk *link* 9 dengan $z = 9$

$$\begin{aligned}
 x_9(t+1) &= x_9(t) + \Delta T \left[\sum_{w=9} \tau_{w,9} \frac{S_w}{C_4} \sum_{i=2} u_{4,i}(t) - \frac{S_9}{C_4} \sum_{i=2} u_{4,i}(t) \right] \\
 &= x_9(t) + \Delta T \left[\tau_{9,9} \frac{S_9}{C_4} u_{4,2}(t) - \frac{S_9}{C_4} u_{4,2}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Untuk *link* 10 dengan $z = 10$

$$\begin{aligned}
 x_{10}(t+1) &= x_{10}(t) + \Delta T \left[\sum_{w=8,9} \tau_{w,10} \frac{S_w}{C_4} \sum_{i=1,2} u_{4,i}(t) - \frac{S_{10}}{C_5} \sum_{i=1} u_{5,i}(t) \right] \\
 &= x_{10}(t) + \Delta T \left[\tau_{8,10} \frac{S_8}{C_4} u_{4,1}(t) + \tau_{9,10} \frac{S_9}{C_4} u_{4,2}(t) - \frac{S_{10}}{C_5} u_{5,1}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Untuk *link* 11 dengan $z = 11$

$$\begin{aligned}
 x_{11}(t+1) &= x_{11}(t) + \Delta T \left[\sum_{w=1,2,3} \tau_{w,11} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=1,2,3} u_{1,i}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_{11}}{C_5} \sum_{i=2} u_{5,i}(t) \right] \\
 &= x_{11}(t) + \Delta T \left[\tau_{1,11} \frac{S_1}{C_1} u_{1,1}(t) + \tau_{2,11} \frac{S_2}{C_1} u_{1,2}(t) \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{3,11} \frac{S_3}{C_1} u_{1,3}(t) - \frac{S_{11}}{C_5} u_{5,2}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Untuk *link* 12 dengan $z = 12$

$$\begin{aligned}
 x_{12}(t+1) &= x_{12}(t) + \Delta T \left[\sum_{w=10,11} \tau_{w,12} \frac{S_w}{C_5} \sum_{i=1,2} u_{5,i}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_{12}}{C_6} \sum_{i=1} u_{6,i}(t) \right] \\
 &= x_{12}(t) + \Delta T \left[\tau_{10,12} \frac{S_{10}}{C_5} u_{5,1}(t) + \tau_{11,12} \frac{S_{11}}{C_5} u_{5,2}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_{12}}{C_6} u_{6,1}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Untuk *link* 13 dengan $z = 13$

$$\begin{aligned}
 x_{13}(t+1) &= x_{13}(t) + \Delta T \left[\sum_{w=1,2,3} \tau_{w,13} \frac{S_w}{C_1} \sum_{i=1,2,3} u_{1,i}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_{13}}{C_6} \sum_{i=2} u_{6,i}(t) \right] \\
 &= x_{13}(t) + \Delta T \left[\tau_{1,13} \frac{S_1}{C_1} u_{1,1}(t) + \tau_{2,13} \frac{S_2}{C_1} u_{1,2}(t) \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{3,13} \frac{S_3}{C_1} u_{1,3}(t) - \frac{S_{13}}{C_6} u_{6,2}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

sehingga dapat dibentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{13}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{13}(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & E & F & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H & II & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J & K & L & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N & O & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & T & U & 0 & 0 & 0 \\ V & W & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & AA & AB & 0 \\ AC & AD & AE & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{4,1} \\ u_{4,2} \\ u_{5,1} \\ u_{5,2} \\ u_{6,1} \\ u_{6,2} \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \Delta T \left(\tau_{1,1} \frac{S_1}{C_1} - \frac{S_1}{C_1} \right)$$

$$B1 = \Delta T \left(\tau_{2,2} \frac{S_2}{C_1} - \frac{S_2}{C_1} \right)$$

$$C = \Delta T \left(\tau_{3,3} \frac{S_3}{C_1} - \frac{S_3}{C_1} \right)$$

$$D = \Delta T \left(\tau_{1,4} \frac{S_1}{C_1} \right)$$

$$E = \Delta T \left(\tau_{2,4} \frac{S_2}{C_1} \right)$$

$$F = \Delta T \left(\tau_{3,4} \frac{S_3}{C_1} \right)$$

$$G = \Delta T \left(-\frac{S_4}{C_2} \right)$$

$$H = \Delta T \left(-\frac{S_5}{C_2} \right)$$

$$II = \Delta T \left(\tau_{6,5} \frac{S_6}{C_3} \right)$$

$$I = \Delta T \left(\tau_{7,5} \frac{S_7}{C_3} \right)$$

$$J = \Delta T \left(\tau_{1,6} \frac{S_1}{C_1} \right)$$

$$K = \Delta T \left(\tau_{2,6} \frac{S_2}{C_1} \right)$$

$$L = \Delta T \left(\tau_{3,6} \frac{S_3}{C_1} \right)$$

$$M = \Delta T \left(-\frac{S_6}{C_3} \right)$$

$$N = \Delta T \left(-\frac{S_7}{C_3} \right)$$

$$O = \Delta T \left(\tau_{8,7} \frac{S_8}{C_4} \right)$$

$$P = \Delta T \left(\tau_{9,7} \frac{S_9}{C_4} \right)$$

$$Q = \Delta T \left(\tau_{8,8} \frac{S_8}{C_4} - \frac{S_8}{C_4} \right)$$

$$R = \Delta T \left(\tau_{9,9} \frac{S_9}{C_4} - \frac{S_9}{C_4} \right)$$

$$S = \Delta T \left(\tau_{8,10} \frac{S_8}{C_4} \right)$$

$$T = \Delta T \left(\tau_{9,10} \frac{S_9}{C_4} \right)$$

$$U = \Delta T \left(-\frac{S_{10}}{C_5} \right)$$

$$V = \Delta T \left(\tau_{1,11} \frac{S_1}{C_1} \right)$$

$$W = \Delta T \left(\tau_{2,11} \frac{S_2}{C_1} \right)$$

$$X = \Delta T \left(\tau_{3,11} \frac{S_3}{C_1} \right)$$

$$Y = \Delta T \left(-\frac{S_{11}}{C_5} \right)$$

$$Z = \Delta T \left(\tau_{10,12} \frac{S_{10}}{C_5} \right)$$

$$AA = \Delta T \left(\tau_{11,12} \frac{S_{11}}{C_5} \right)$$

$$AB = \Delta T \left(-\frac{S_{12}}{C_6} \right)$$

$$AC = \Delta T \left(\tau_{1,13} \frac{S_1}{C_1} \right)$$

$$AD = \Delta T \left(\tau_{2,13} \frac{S_2}{C_1} \right)$$

$$AE = \Delta T \left(\tau_{3,13} \frac{S_3}{C_1} \right)$$

$$AF = \Delta T \left(-\frac{S_{13}}{C_6} \right)$$

diberikan:

$$\tau_{1,4} = 0.20 \quad \tau_{3,13} = 0.15$$

$$\tau_{1,6} = 0.05 \quad \tau_{6,5} = 0.50$$

$$\tau_{1,11} = 0.05 \quad \tau_{7,5} = 0.80$$

$$\tau_{1,13} = 0.70 \quad \tau_{8,7} = 0.40$$

$$\tau_{2,4} = 0.25 \quad \tau_{8,10} = 0.60$$

$$\tau_{2,6} = 0.30 \quad \tau_{9,7} = 0.60$$

$$\tau_{2,11} = 0.30 \quad \tau_{9,10} = 0.40$$

$$\tau_{2,13} = 0.15 \quad \tau_{10,12} = 0.80$$

$$\tau_{3,4} = 0.65 \quad \tau_{11,12} = 0.50$$

$$\tau_{3,6} = 0.05 \quad \tau = 0, \text{ untuk } \tau \text{ yang lain}$$

$$\tau_{3,11} = 0.05$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_7 = S_8 = S_9 = S_{10} = S_{12} = S_{13}$$

$$= 3600$$

$$S_6 = S_{11}$$

$$= 1800$$

dengan mengambil $\Delta T = 0.1$ dan pembulatan sampai maksimal 4 angka di belakang koma, diperoleh

A	$=$	-1.875	$B1$	$=$	-1.875
C	$=$	-1.875	D	$=$	0.3750
E	$=$	0.4688	F	$=$	1.2188
G	$=$	-2.7149	H	$=$	-2.7149
I	$=$	3.5165	II	$=$	1.0989
J	$=$	0.0938	K	$=$	0.5625
L	$=$	0.0938	M	$=$	-2.1978
N	$=$	-4.3956	O	$=$	0.8696
P	$=$	1.3043	Q	$=$	-2.1739
R	$=$	-2.1739	S	$=$	1.3043
T	$=$	0.8696	U	$=$	-3.9258
V	$=$	0	W	$=$	0.5625
X	$=$	0.0938	Y	$=$	-1.9629
Z	$=$	3.1407	AA	$=$	0.9815
AB	$=$	-2.7418	AC	$=$	0
AD	$=$	0.2813	AE	$=$	0.2813
AF	$=$	2.7418			

4.2 Penerapan *Multi-Agent Model Predictive Control* (MPC) pada Optimasi Lampu Hijau pada Jaringan Lalu Lintas Perkotaan

Pada MPC, pengontrol dilakukan secara prediktif. Seperti yang telah dijelaskan pada bab 2 sebelumnya, dalam MPC akan diperkirakan suatu nilai \bar{x} pada saat t yang berbeda. Berikut ini akan diberikan beberapa langkah untuk menyelesaikan lama waktu hijau menggunakan optimasi MPC linier.

4.2.1 Formulasi *Model Predictive Control*

Dengan menggunakan persamaan state pada persamaan (2.6) maka dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{x}_1 = [x_1 & x_2 & x_3]' & \mathbf{u}_1 = [u_1 & u_2 & u_3]' \\
 \mathbf{x}_2 = [x_4 & x_5]' & \mathbf{u}_2 = [u_4 & u_5]' \\
 \mathbf{x}_3 = [x_6 & x_7]' & \mathbf{u}_3 = [u_6 & u_7]' \\
 \mathbf{x}_4 = [x_8 & x_9]' & \mathbf{u}_4 = [u_8 & u_9]' \\
 \mathbf{x}_5 = [x_{10} & x_{11}]' & \mathbf{u}_5 = [u_{10} & u_{11}]' \\
 \mathbf{x}_6 = [x_{12} & x_{13}]' & \mathbf{u}_6 = [u_{12} & u_{13}]'
 \end{array}$$

Dan juga diberikan $I(m)$ adalah himpunan input tetangga dari suatu subsistem m , dimana subsistem mempengaruhi keadaan dari m , dengan :

$$\begin{aligned}
 I(1) &= 1 \\
 I(2) &= 1, 2, 3 \\
 I(3) &= 1, 3, 4 \\
 I(4) &= 4 \\
 I(5) &= 1, 4, 5 \\
 I(6) &= 1, 5, 6
 \end{aligned}$$

sehingga untuk subsistem $m = 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1(t+1) &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + \sum_{i \in I(1)} B_{1i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + \sum_{i=1} B_{1i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + B_{11} \mathbf{u}_1(t)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

untuk subsistem $m = 2$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_2(t+1) &= A_2 \mathbf{x}_2(t) + \sum_{i \in I(2)} B_{2i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_2 \mathbf{x}_2(t) + \sum_{i=1,2,3} B_{2i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + B_{21} \mathbf{u}_1(t) + B_{22} \mathbf{u}_2(t) \\
 &\quad + B_{23} \mathbf{u}_3(t)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

untuk subsistem $m = 3$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_3(t+1) &= A_3 \mathbf{x}_3(t) + \sum_{i \in I(3)} B_{3i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_3 \mathbf{x}_3(t) + \sum_{i=1,3,4} B_{3i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_3 \mathbf{x}_3(t) + B_{31} \mathbf{u}_1(t) + B_{23} \mathbf{u}_3(t) \\
 &\quad + B_{34} \mathbf{u}_4(t)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

untuk subsistem $m = 4$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_4(t+1) &= A_4 \mathbf{x}_4(t) + \sum_{i \in I(4)} B_{4i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_4 \mathbf{x}_4(t) + \sum_{i=4} B_{4i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_4 \mathbf{x}_4(t) + B_{44} \mathbf{u}_4(t)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

untuk subsistem $m = 5$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_5(t+1) &= A_5 \mathbf{x}_5(t) + \sum_{i \in I(5)} B_{5i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_5 \mathbf{x}_5(t) + \sum_{i=1,4,5} B_{5i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_5 \mathbf{x}_5(t) + B_{51} \mathbf{u}_1(t) + B_{54} \mathbf{u}_4(t) \\
 &\quad + B_{55} \mathbf{u}_5(t)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

untuk subsistem $m = 6$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_6(t+1) &= A_6 \mathbf{x}_6(t) + \sum_{i \in I(6)} B_{6i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_6 \mathbf{x}_6(t) + \sum_{i=1,5,6} B_{6i} \mathbf{u}_i(t) \\
 &= A_6 \mathbf{x}_6(t) + B_{61} \mathbf{u}_1(t) + B_{65} \mathbf{u}_5(t) \\
 &\quad + B_{66} \mathbf{u}_6(t)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

dengan menggunakan matriks bersesuaian, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1(t+1) &= A_1 \mathbf{x}_1(t) + B_{11} \mathbf{u}_1(t) \\
 \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} &= A_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + B_{11} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_2(t+1) = A_2 \mathbf{x}_2(t) + B_{21} \mathbf{u}_1(t) + B_{22} \mathbf{u}_2(t) + B_{23} \mathbf{u}_3(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + B_{21} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + B_{22} \begin{bmatrix} u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} + B_{23} \begin{bmatrix} u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E & F \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ II & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3(t+1) = A_3 \mathbf{x}_3(t) + B_{31} \mathbf{u}_1(t) + B_{33} \mathbf{u}_3(t) + B_{34} \mathbf{u}_4(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_6(t+1) \\ x_7(t+1) \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} + B_{31} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + B_{33} \begin{bmatrix} u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} + B_{34} \begin{bmatrix} u_8(t) \\ u_9(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J & K & L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ O & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_8(t) \\ u_9(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_4(t+1) = A_4 \mathbf{x}_4(t) + B_{44} \mathbf{u}_4(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_8(t+1) \\ x_9(t+1) \end{bmatrix} = A_4 \begin{bmatrix} x_8(t) \\ x_9(t) \end{bmatrix} + B_{44} \begin{bmatrix} u_8(t) \\ u_9(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_8(t) \\ x_9(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_8(t) \\ u_9(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_5(t+1) &= A_5 \mathbf{x}_5(t) + B_{51} \mathbf{u}_1(t) + B_{54} \mathbf{u}_4(t) + B_{55} \mathbf{u}_5(t) \\
\begin{bmatrix} x_{10}(t+1) \\ x_{11}(t+1) \end{bmatrix} &= A_5 \begin{bmatrix} x_{10}(t) \\ x_{11}(t) \end{bmatrix} + B_{51} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + B_{54} \begin{bmatrix} x_8(t) \\ x_9(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + B_{55} \begin{bmatrix} u_{10}(t) \\ u_{11}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10}(t) \\ x_{11}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V & W & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_8(t) \\ u_9(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10}(t) \\ u_{11}(t) \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}_6(t+1) &= A_6 \mathbf{x}_6(t) + B_{61} \mathbf{u}_1(t) + B_{65} \mathbf{u}_5(t) + B_{66} \mathbf{u}_6(t) \\
\begin{bmatrix} x_{12}(t+1) \\ x_{13}(t+1) \end{bmatrix} &= A_6 \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{13}(t) \end{bmatrix} + B_{61} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + B_{65} \begin{bmatrix} u_{10}(t) \\ u_{11}(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + B_{66} \begin{bmatrix} u_{12}(t) \\ u_{13}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{13}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ AC & AD & AE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} Z & AA \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10}(t) \\ u_{11}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & AF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12}(t) \\ u_{13}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -1.875 & 0 & 0 \\ 0 & -1.875 & 0 \\ 0 & 0 & -1.875 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0.3750 & 0.4688 & 1.2188 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} -2.7149 & 0 \\ 0 & -2.7149 \end{bmatrix}$$

$$B_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0980 & 3.5165 \end{bmatrix}$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} 0.0938 & 0.5625 & 0.0938 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{33} = \begin{bmatrix} -2.1978 & 0 \\ 0 & -4.3956 \end{bmatrix}$$

$$B_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.1739 & 2.1739 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B_{44} &= \begin{bmatrix} -2.1739 & 0 \\ 0 & -2.1739 \end{bmatrix} \\
B_{51} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5625 & 0.0938 \end{bmatrix} \\
B_{54} &= \begin{bmatrix} 1.3043 & 0.8696 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_{55} &= \begin{bmatrix} -3.9258 & 0 \\ 0 & -1.9629 \end{bmatrix} \\
B_{61} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2813 & 0.2813 \end{bmatrix} \\
B_{65} &= \begin{bmatrix} 3.1407 & 0.9815 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_{66} &= \begin{bmatrix} -2.7418 & 0 \\ 0 & -2.7418 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.2.2 Formulasi Kompak

Pada bab 2 telah dijelaskan formulasi kompak dan diberikan *state prediction* sesuai dengan persamaan (2.12) yakni:

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t+k) = A_m^k \mathbf{x}_m(t) + \sum_{l=1}^K \sum_{i \in I(m)} A_m^{l-1} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+k-l) \quad (4.21)$$

dengan mengambil $k = 0, 1, \dots, K$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_m(t) &= \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t-1) + A_m B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t-2) + \dots + \\
&\quad A_m^{K-1} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t-K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_m(t+1) &= A_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t) + A_m B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t-1) + \dots + \\
&\quad A_m^{K-1} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+1-K) \\
\bar{\mathbf{x}}_m(t+2) &= A_m^2 \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+1) + A_m B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \dots + \\
&\quad A_m^{K-1} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+2-K) \\
&\vdots = \vdots \\
\bar{\mathbf{x}}_m(t+K) &= A_m^K \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+K-1) + A_m B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t+K-2) \\
&\quad + \dots + A_m^{K-1} B_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t)
\end{aligned}$$

sehingga dapat diperoleh :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_m(t+1) \\ \bar{\mathbf{x}}_m(t+2) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_m(t+K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m \\ A_m^1 \\ \vdots \\ A_m^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \mathbf{x}_m(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{mi} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_m B_{mi} & B_{mi} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A_m^{K-1} B_{mi} & A_m^{K-2} B_{mi} & A_m^{K-3} B_{mi} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_i(t+1) \\ \bar{\mathbf{u}}_i(t+2) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_i(t+K-1) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan *state prediction* sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t) = \bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} \bar{B}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t)$$

dimana

$$\bar{A}_m = \begin{bmatrix} A_m \\ A_m^2 \\ \vdots \\ A_m^K \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

dan

$$\bar{B}_{mi} = \begin{bmatrix} B_{mi} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_m B_{mi} & B_{mi} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A_m^{K-1} B_{mi} & A_m^{K-2} B_{mi} & A_m^{K-3} B_{mi} & \cdots & B_{mi} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

dengan mensubstitusi $\bar{\mathbf{x}}_m(t)$ pada fungsi objektif, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \phi_m &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_m(t)' \bar{A}_m' \bar{Q}_m \bar{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \sum_{i \in I(m)} \mathbf{x}_m(t)' \bar{A}_m' \bar{Q}_m \bar{B}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} \bar{\mathbf{u}}_i' \bar{B}_{mi}' \bar{Q}_m \bar{B}_{mj} \bar{\mathbf{u}}_j + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \bar{\mathbf{u}}_m \quad (4.24) \end{aligned}$$

untuk subsistem 1 dengan $m = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \sum_{i \in I(1)} \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{B}_{1i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(1)} \sum_{j \in I(1)} \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{1i} \bar{Q}_1 \bar{B}_{1j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{R}_1 \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \sum_{i=1} \mathbf{x}'_1(t) \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{B}_{1i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1} \sum_{j=1} \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{1i} \bar{Q}_1 \bar{B}_{1j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{R}_1 \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{B}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1} \bar{\mathbf{u}}'_i \bar{B}'_{1i} \bar{Q}_1 \bar{B}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{R}_1 \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_1(t)' \bar{A}'_1 \bar{Q}_1 \bar{B}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{B}'_{11} \bar{Q}_1 \bar{B}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{R}_1 \bar{\mathbf{u}}_1(t)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

untuk subsistem 2 dengan $m = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}'_2 \bar{Q}_2 \bar{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \sum_{i \in I(2)} \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}'_2 \bar{Q}_2 \bar{B}_{2i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(2)} \sum_{j \in I(2)} \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{2i} \bar{Q}_2 \bar{B}_{2j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_2(t) \bar{R}_2 \bar{\mathbf{u}}_2(t) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}'_2 \bar{Q}_2 \bar{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \sum_{i=1,2,3} \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}'_2 \bar{Q}_2 \bar{B}_{2i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_{j=1,2,3} \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{2i} \bar{Q}_2 \bar{B}_{2j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_2(t) \bar{R}_2 \bar{\mathbf{u}}_2(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{B}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{B}_{22} \bar{\mathbf{u}}_2(t) \\
&\quad + \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{B}_{23} \bar{\mathbf{u}}_3(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \left[\bar{\mathbf{u}}_i'(t) \bar{B}_{2i}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mathbf{u}}_i'(t) \bar{B}_{2i}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{22} \bar{\mathbf{u}}_2(t) + \bar{\mathbf{u}}_i'(t) \bar{B}_{2i}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{23} \bar{\mathbf{u}}_3(t) \right] + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2'(t) \bar{R}_2 \bar{\mathbf{u}}_2(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{B}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{B}_{22} \bar{\mathbf{u}}_2(t) \\
&\quad + \mathbf{x}_2(t)' \bar{A}_2' \bar{Q}_2 \bar{B}_{23} \bar{\mathbf{u}}_3(t) + \frac{1}{2} \left[\bar{\mathbf{u}}_1'(t) \bar{B}_{21}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \right. \\
&\quad + \bar{\mathbf{u}}_1'(t) \bar{B}_{21}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{22} \bar{\mathbf{u}}_2(t) + \bar{\mathbf{u}}_1'(t) \bar{B}_{21}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{23} \bar{\mathbf{u}}_3(t) \\
&\quad + \bar{\mathbf{u}}_2'(t) \bar{B}_{22}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \bar{\mathbf{u}}_2'(t) \bar{B}_{22}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{22} \bar{\mathbf{u}}_2(t) \\
&\quad + \bar{\mathbf{u}}_2'(t) \bar{B}_{22}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{23} \bar{\mathbf{u}}_3(t) + \bar{\mathbf{u}}_3'(t) \bar{B}_{23}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
&\quad \left. + \bar{\mathbf{u}}_3'(t) \bar{B}_{23}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{22} \bar{\mathbf{u}}_2(t) + \bar{\mathbf{u}}_3'(t) \bar{B}_{23}' \bar{Q}_2 \bar{B}_{23} \bar{\mathbf{u}}_3(t) \right] + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_2'(t) \bar{R}_2 \bar{\mathbf{u}}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

untuk subsistem 3 dengan $m = 3$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t) + \sum_{i \in I(3)} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{B}_{3i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(3)} \sum_{j \in I(3)} \bar{\mathbf{u}}_i'(t) \bar{B}_{3i}' \bar{Q}_3 \bar{B}_{3j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_3'(t) \bar{R}_3 \bar{\mathbf{u}}_3(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t) + \sum_{i=1,3,4} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{B}_{3i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,4} \sum_{j=1,3,4} \bar{\mathbf{u}}_i'(t) \bar{B}_{3i}' \bar{Q}_3 \bar{B}_{3j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_3'(t) \bar{R}_3 \bar{\mathbf{u}}_3(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t) + \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{B}_{31} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
&\quad + \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{B}_{32} \bar{\mathbf{u}}_2(t) + \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{B}_{33} \bar{\mathbf{u}}_3(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,4} \left[\bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{3i} \bar{Q}_3 \bar{B}_{31} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{3i} \bar{Q}_3 \bar{B}_{33} \bar{\mathbf{u}}_3(t) \right. \\
& \left. + \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{3i} \bar{Q}_3 \bar{B}_{34} \bar{\mathbf{u}}_4(t) \right] + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_3(t) \bar{R}_3 \bar{\mathbf{u}}_3(t) \\
& = \frac{1}{2} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}'_3 \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t) + \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}'_3 \bar{Q}_3 \bar{B}_{31} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}'_3 \bar{Q}_3 \bar{B}_{33} \bar{\mathbf{u}}_3(t) \\
& + \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}'_3 \bar{Q}_3 \bar{B}_{34} \bar{\mathbf{u}}_4(t) + \frac{1}{2} \left[\bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{B}'_{31} \bar{Q}_3 \bar{B}_{31} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \right. \\
& + \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{B}'_{31} \bar{Q}_3 \bar{B}_{33} \bar{\mathbf{u}}_3(t) + \bar{\mathbf{u}}'_1(t) \bar{B}'_{31} \bar{Q}_3 \bar{B}_{34} \bar{\mathbf{u}}_4(t) \\
& + \bar{\mathbf{u}}'_3(t) \bar{B}'_{33} \bar{Q}_3 \bar{B}_{31} \bar{\mathbf{u}}_1(t) + \bar{\mathbf{u}}'_3(t) \bar{B}'_{33} \bar{Q}_3 \bar{B}_{33} \bar{\mathbf{u}}_3(t) \\
& + \bar{\mathbf{u}}'_3(t) \bar{B}'_{33} \bar{Q}_3 \bar{B}_{34} \bar{\mathbf{u}}_4(t) + \bar{\mathbf{u}}'_4(t) \bar{B}'_{34} \bar{Q}_3 \bar{B}_{31} \bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
& + \bar{\mathbf{u}}'_4(t) \bar{B}'_{34} \bar{Q}_3 \bar{B}_{33} \bar{\mathbf{u}}_3(t) + \bar{\mathbf{u}}'_4(t) \bar{B}'_{34} \bar{Q}_3 \bar{B}_{34} \bar{\mathbf{u}}_4(t) \left. \right] + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_3(t) \bar{R}_3 \bar{\mathbf{u}}_3(t) \tag{4.27}
\end{aligned}$$

untuk subsistem 4 dengan $m = 4$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_4 & = \frac{1}{2} \mathbf{x}_4(t)' \bar{A}'_4 \bar{Q}_4 \bar{A}_4 \mathbf{x}_4(t) + \sum_{i \in I(4)} \mathbf{x}_4(t)' \bar{A}'_4 \bar{Q}_4 \bar{B}_{4i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(4)} \sum_{j \in I(4)} \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{4i} \bar{Q}_4 \bar{B}_{4j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_4(t) \bar{R}_4 \bar{\mathbf{u}}_4(t) \\
& = \frac{1}{2} \mathbf{x}_4(t)' \bar{A}'_4 \bar{Q}_4 \bar{A}_4 \mathbf{x}_4(t) + \sum_{i=4} \mathbf{x}_4(t)' \bar{A}'_4 \bar{Q}_4 \bar{B}_{4i} \bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=4} \sum_{j=4} \bar{\mathbf{u}}'_i(t) \bar{B}'_{4i} \bar{Q}_4 \bar{B}_{4j} \bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_4(t) \bar{R}_4 \bar{\mathbf{u}}_4(t) \\
& = \frac{1}{2} x_4(t)' \bar{A}'_4 \bar{Q}_4 \bar{A}_4 x_4(t) + x_4(t)' \bar{A}'_4 \bar{Q}_4 \bar{B}_{44} \bar{u}_4(t) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=4} \bar{u}'_i \bar{B}'_{4i} \bar{Q}_4 \bar{B}_{44} \bar{u}_4 + \frac{1}{2} \bar{u}'_4(t) \bar{R}_4 \bar{u}_4(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_4(t)' \overline{A}_4' \overline{Q}_4 \overline{A}_4 \mathbf{x}_4(t) + \mathbf{x}_4(t)' \overline{A}_4' \overline{Q}_4 \overline{B}_{44} \overline{\mathbf{u}}_4(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}}_4(t)' \overline{B}_{44}' \overline{Q}_4 \overline{B}_{44} \overline{\mathbf{u}}_4(t) + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}}_4(t)' \overline{R}_4 \overline{\mathbf{u}}_4(t)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

untuk subsistem 5 dengan $m = 5$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_5 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) + \sum_{i \in I(5)} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{5i} \overline{\mathbf{u}}_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(5)} \sum_{j \in I(5)} \overline{\mathbf{u}}_i(t)' \overline{B}_{5i}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{5j} \overline{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}}_5(t)' \overline{R}_5 \overline{\mathbf{u}}_5(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) + \sum_{i=1,4,5} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{5i} \overline{\mathbf{u}}_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1,4,5} \sum_{j=1,4,5} \overline{\mathbf{u}}_i(t)' \overline{B}_{5i}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{5j} \overline{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}}_5(t)' \overline{R}_5 \overline{\mathbf{u}}_5(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) + \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{51} \overline{\mathbf{u}}_1(t) \\
&\quad + \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{54} \overline{\mathbf{u}}_4(t) + \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{55} \overline{\mathbf{u}}_5(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1,4,5} \left[\overline{\mathbf{u}}_i(t)' \overline{B}_{5i}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{51} \overline{\mathbf{u}}_1(t) + \overline{\mathbf{u}}_i(t)' \overline{B}_{5i}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{54} \overline{\mathbf{u}}_4(t) \right. \\
&\quad \left. + \overline{\mathbf{u}}_i(t)' \overline{B}_{5i}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{55} \overline{\mathbf{u}}_5(t) \right] + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}}_5(t)' \overline{R}_5 \overline{\mathbf{u}}_5(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) + \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{51} \overline{\mathbf{u}}_1(t) \\
&\quad + \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{54} \overline{\mathbf{u}}_4(t) + \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{B}_{55} \overline{\mathbf{u}}_5(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{u}}_1(t)' \overline{B}_{51}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{51} \overline{\mathbf{u}}_1(t) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\mathbf{u}}_1'(t)\bar{B}_{51}'\bar{Q}_5\bar{B}_{54}\bar{\mathbf{u}}_4(t) + \bar{\mathbf{u}}_1'(t)\bar{B}_{51}'\bar{Q}_5\bar{B}_{55}\bar{\mathbf{u}}_5(t) \\
& +\bar{\mathbf{u}}_4'(t)\bar{B}_{54}'\bar{Q}_5\bar{B}_{51}\bar{\mathbf{u}}_1(t) + \bar{\mathbf{u}}_4'(t)\bar{B}_{54}'\bar{Q}_5\bar{B}_{54}\bar{\mathbf{u}}_4(t) \\
& +\bar{\mathbf{u}}_4'(t)\bar{B}_{54}'\bar{Q}_5\bar{B}_{55}\bar{\mathbf{u}}_5(t) + \bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{B}_{55}'\bar{Q}_5\bar{B}_{51}\bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
& +\bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{B}_{55}'\bar{Q}_5\bar{B}_{54}\bar{\mathbf{u}}_4(t) + \bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{B}_{55}'\bar{Q}_5\bar{B}_{55}\bar{\mathbf{u}}_5(t) \Big] + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{R}_5\bar{\mathbf{u}}_5(t)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

untuk subsistem 6 dengan $m = 6$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_6 &= \frac{1}{2}\mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{A}_6\mathbf{x}_6(t) + \sum_{i \in I(6)} \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{6i}\bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in I(6)} \sum_{j \in I(6)} \bar{\mathbf{u}}_i'(t)\bar{B}_{6i}'\bar{Q}_6\bar{B}_{6j}\bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{R}_6\bar{\mathbf{u}}_6(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{A}_6\mathbf{x}_6(t) + \sum_{i=1,5,6} \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{6i}\bar{\mathbf{u}}_i(t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1,5,6} \sum_{j=1,5,6} \bar{\mathbf{u}}_i'(t)\bar{B}_{6i}'\bar{Q}_6\bar{B}_{6j}\bar{\mathbf{u}}_j(t) + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{R}_6\bar{\mathbf{u}}_6(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{A}_6\mathbf{x}_6(t) + \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{61}\bar{\mathbf{u}}_1(t) + \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{65}\bar{\mathbf{u}}_5(t) \\
&+ \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{66}\bar{\mathbf{u}}_6(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1,5,6} \left[\bar{\mathbf{u}}_i'(t)\bar{B}_{6i}'\bar{Q}_6\bar{B}_{61}\bar{\mathbf{u}}_1(t) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mathbf{u}}_i'(t)\bar{B}_{6i}'\bar{Q}_6\bar{B}_{65}\bar{\mathbf{u}}_5(t) + \bar{\mathbf{u}}_i'(t)\bar{B}_{6i}'\bar{Q}_6\bar{B}_{66}\bar{\mathbf{u}}_6(t) \right] + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{R}_6\bar{\mathbf{u}}_6(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{A}_6\mathbf{x}_6(t) + \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{61}\bar{\mathbf{u}}_1(t) + \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{65}\bar{\mathbf{u}}_5(t) \\
&+ \mathbf{x}_6(t)'\bar{A}_6'\bar{Q}_6\bar{B}_{66}\bar{\mathbf{u}}_6(t) + \frac{1}{2} \left[\bar{\mathbf{u}}_1'(t)\bar{B}_{61}'\bar{Q}_6\bar{B}_{61}\bar{\mathbf{u}}_1(t) \right. \\
&\quad + \bar{\mathbf{u}}_1'(t)\bar{B}_{61}'\bar{Q}_6\bar{B}_{65}\bar{\mathbf{u}}_5(t) + \bar{\mathbf{u}}_1'(t)\bar{B}_{61}'\bar{Q}_6\bar{B}_{66}\bar{\mathbf{u}}_6(t) \\
&\quad \left. + \bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{B}_{65}'\bar{Q}_6\bar{B}_{61}\bar{\mathbf{u}}_1(t) + \bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{B}_{65}'\bar{Q}_6\bar{B}_{65}\bar{\mathbf{u}}_5(t) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\mathbf{u}}_5'(t)\bar{B}_{65}'\bar{Q}_6\bar{B}_{66}\bar{\mathbf{u}}_6(t) + \bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{B}_{66}'\bar{Q}_6\bar{B}_{61}\bar{\mathbf{u}}_1(t) \\
& +\bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{B}_{66}'\bar{Q}_6\bar{B}_{65}\bar{\mathbf{u}}_5(t) + \bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{B}_{66}'\bar{Q}_6\bar{B}_{66}\bar{\mathbf{u}}_6(t) \Big] + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}_6'(t)\bar{R}_6\bar{\mathbf{u}}_6(t)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Lalu didefinisikan persamaan (2.16) - (2.19) pada bab 2, maka untuk subsistem 1 dengan $m = 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{x}_1(t)'\bar{A}_1'\bar{Q}_1\bar{A}_1\mathbf{x}_1(t) \\
g_{11} &= \bar{B}_{11}'\bar{Q}_1\bar{A}_1\mathbf{x}_1(t) \\
H_{111} &= 0 \text{ karena } i = j = m
\end{aligned}$$

untuk subsistem 2 dengan $m = 2$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{x}_2(t)'\bar{A}_2'\bar{Q}_2\bar{A}_2\mathbf{x}_2(t) \\
g_{21} &= \bar{B}_{21}'\bar{Q}_2\bar{A}_2\mathbf{x}_2(t) \\
g_{22} &= \bar{B}_{22}'\bar{Q}_2\bar{A}_2\mathbf{x}_2(t) \\
g_{23} &= \bar{B}_{23}'\bar{Q}_2\bar{A}_2\mathbf{x}_2(t) \\
H_{211} &= \bar{B}_{21}'\bar{Q}_2\bar{B}_{21} \\
H_{212} &= 0 \text{ karena } j = m \\
H_{213} &= \bar{B}_{21}'\bar{Q}_2\bar{B}_{23} \\
H_{221} &= 0 \text{ karena } i = m \\
H_{222} &= 0 \text{ karena } i = j = m \\
H_{223} &= 0 \text{ karena } i = m \\
H_{231} &= \bar{B}_{23}'\bar{Q}_2\bar{B}_{21} \\
H_{232} &= 0 \text{ karena } j = m \\
H_{233} &= \bar{B}_{23}'\bar{Q}_2\bar{B}_{23}
\end{aligned}$$

untuk subsistem 3 dengan $m = 3$ diperoleh:

$$c_3 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_3(t)' \bar{A}_3' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t)$$

$$g_{31} = \bar{B}_{31}' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t)$$

$$g_{33} = \bar{B}_{33}' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t)$$

$$g_{34} = \bar{B}_{34}' \bar{Q}_3 \bar{A}_3 \mathbf{x}_3(t)$$

$$H_{311} = \bar{B}_{31}' \bar{Q}_3 \bar{B}_{31}$$

$$H_{313} = 0 \text{ karena } j = m$$

$$H_{314} = \bar{B}_{31}' \bar{Q}_3 \bar{B}_{34}$$

$$H_{331} = 0 \text{ karena } i = m$$

$$H_{333} = 0 \text{ karena } i = j = m$$

$$H_{334} = 0 \text{ karena } i = m$$

$$H_{341} = \bar{B}_{34}' \bar{Q}_3 \bar{B}_{31}$$

$$H_{343} = 0 \text{ karena } j = m$$

$$H_{344} = \bar{B}_{34}' \bar{Q}_3 \bar{B}_{34}$$

untuk subsistem 4 dengan $m = 4$ diperoleh:

$$c_4 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_4(t)' \bar{A}_4' \bar{Q}_4 \bar{A}_4 \mathbf{x}_4(t)$$

$$g_{44} = \bar{B}_{44}' \bar{Q}_4 \bar{A}_4 \mathbf{x}_4(t)$$

$$H_{444} = 0 \text{ karena } i = j = m$$

untuk subsistem 5 dengan $m = 5$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
 c_5 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_5(t)' \overline{A}_5' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) \\
 g_{51} &= \overline{B}_{51}' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) \\
 g_{54} &= \overline{B}_{54}' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) \\
 g_{55} &= \overline{B}_{55}' \overline{Q}_5 \overline{A}_5 \mathbf{x}_5(t) \\
 H_{511} &= \overline{B}_{51}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{51} \\
 H_{514} &= \overline{B}_{51}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{54} \\
 H_{515} &= 0 \text{ karena } j = m \\
 H_{541} &= \overline{B}_{54}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{51} \\
 H_{544} &= \overline{B}_{54}' \overline{Q}_5 \overline{B}_{54} \\
 H_{545} &= 0 \text{ karena } j = m \\
 H_{551} &= 0 \text{ karena } i = m \\
 H_{554} &= 0 \text{ karena } i = m \\
 H_{555} &= 0 \text{ karena } i = j = m
 \end{aligned}$$

untuk subsistem 6 dengan $m = 6$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
 c_6 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_6(t)' \overline{A}_6' \overline{Q}_6 \overline{A}_6 \mathbf{x}_6(t) \\
 g_{61} &= \overline{B}_{61}' \overline{Q}_6 \overline{A}_6 \mathbf{x}_6(t) \\
 g_{64} &= \overline{B}_{65}' \overline{Q}_6 \overline{A}_6 \mathbf{x}_6(t) \\
 g_{65} &= \overline{B}_{66}' \overline{Q}_6 \overline{A}_6 \mathbf{x}_6(t) \\
 H_{611} &= \overline{B}_{61}' \overline{Q}_6 \overline{B}_{61} \\
 H_{615} &= \overline{B}_{61}' \overline{Q}_6 \overline{B}_{65} \\
 H_{616} &= 0 \text{ karena } j = m
 \end{aligned}$$

$$H_{651} = \overline{B}_{65}' \overline{Q}_6 \overline{B}_{61}$$

$$H_{655} = \overline{B}_{65}' \overline{Q}_6 \overline{B}_{65}$$

$$H_{656} = 0 \text{ karena } j = m$$

$$H_{661} = 0 \text{ karena } i = m$$

$$H_{665} = 0 \text{ karena } i = m$$

$$H_{666} = 0 \text{ karena } i = j = m$$

Sehingga diperoleh :

$$H = \begin{bmatrix} AG & 0 & H_{213} & AH & H_{615} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{231} & 0 & H_{233} & 0 & 0 & 0 \\ AI & 0 & 0 & AJ & 0 & 0 \\ H_{651} & 0 & 0 & 0 & H_{655} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$f = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & 0 & g_{51} & g_{61} \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{23} & g_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{34} & g_{44} & g_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} & g_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{66} \end{bmatrix}$$

dimana

$$AG = H_{211} + H_{311} + H_{511} + H_{611}$$

$$AH = H_{314} + H_{514}$$

$$AI = H_{341} + H_{541}$$

$$AJ = H_{344} + H_{544}$$

4.2.3 Formulasi Dekomposisi

Untuk distribusi tersebar, seorang agent m menentukan nilai dari variabel kendali lokal dari subsistem m . Nilai dari \mathbf{u}_m didapatkan dengan menyelesaikan sebuah masalah optimasi lokal $P_m(t)$ di setiap waktu. Desain dari himpunan $P_m(t)$ dan pasangan antar agent disebut formulasi dekomposisi. Formulasi dikatakan *perfect* jika setiap subsistem $P_m(t)$ menjamin semua kendala pada fungsi objektif $P(t)$ yang bergantung pada $\bar{\mathbf{u}}_m$.

Untuk *perfect* dekomposisi, diberikan:

$\bar{I}(m) = \{i : m \in I(i), i \neq m\}$ adalah himpunan output tetangga dari subsistem m yang mana sebarang subsistem i dengan keadaan $\bar{\mathbf{x}}_i$ dipengaruhi oleh $\bar{\mathbf{u}}_m$.

$C(m) = \{(i, j \in I(m)) \times I(m) : i = m \text{ atau } j = m\}$ adalah subsistem berpasangan dari *quadratic* yang bergantung pada $\bar{\mathbf{u}}_m$.

$C(m, k) = \{(i, j) \in I(k) \times I(k) : i = m \text{ atau } j = m\}$ adalah pasangan dari *quadratic* dengan $k \in \bar{I}(m)$ yang bergantung pada $\bar{\mathbf{u}}_m$.

Sehingga permasalahan *local* untuk agent m adalah

$$P_m(t) : \min f_m = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' H_m \bar{\mathbf{u}}_m + g_m' \bar{\mathbf{u}}_m \quad (4.31)$$

dengan kendala :

$$\bar{C}_m \bar{\mathbf{u}}_m \geq \bar{c}_m$$

$$\bar{D}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{d}_m$$

dimana:

$$H_m = H_{mmm} + \sum_{k \in \bar{I}(m)} H_{kmm}$$

$$g_m = \frac{1}{2} g_{mm} + \sum_{i \in \bar{I}(m)} g_{im}$$

4.3 Memprediksi Kendali Optimal dengan MPC

Pada MPC prediksi nilai kontrol dapat dicari dengan menyelesaikan optimasi *local* dalam bentuk *quadratic programming* :

Meminimumkan :

$$P_m(t) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' H_m \bar{\mathbf{u}}_m + g_m' \bar{\mathbf{u}}_m$$

dengan kendala :

$$\bar{C}_m \bar{\mathbf{u}}_m \geq \bar{c}_m$$

$$\bar{D}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{d}_m$$

dimana:

$$\bar{\mathbf{u}}_m = (\bar{\mathbf{u}}_m(t), \bar{\mathbf{x}}_m(t+1), \bar{\mathbf{u}}_m(t+1), \dots, \bar{\mathbf{u}}_m(t+N-1), \bar{\mathbf{x}}_m(t+N))$$

$$H_1 = H_{111} + H_{211} + H_{311} + H_{511} + H_{611}$$

$$H_2 = H_{222}$$

$$H_3 = H_{333} + H_{233}$$

$$H_4 = H_{444} + H_{344} + H_{544}$$

$$H_5 = H_{555} + H_{655}$$

$$H_6 = H_{666}$$

$$g_1 = 0.5 * g_{11} + g_{21} + g_{31} + g_{51} + g_{61}$$

$$g_2 = 0.5 * g_{22}$$

$$g_3 = 0.5 * g_{33} + g_{23}$$

$$g_4 = 0.5 * g_{44} + g_{34} + g_{54}$$

$$g_5 = 0.5 * g_{55} + g_{65}$$

$$g_6 = 0.5 * g_{66}$$

$\bar{C}_m = I \times C_m$, $\bar{D}_m = I \times D_m$ dengan C_m adalah matriks identitas, D_m adalah matriks $n \times n$ dengan masing-masing elemen 1. $\bar{c}_m = 0$ dan $\bar{d}_m = d_m$ adalah skalar untuk semua $m \in M$

4.4 Hasil Simulasi Analisis pada Optimasi Waktu Hijau

Dari hasil analisa pengontrol MPC pada sub bab 4.3 di atas akan disimulasikan pada sub bab ini menggunakan software MATLAB. Pada simulasi ini, daerah yang diamati adalah subsistem 3 dan diberikan inisialisasi $\bar{x}_1(0) = [505050]'$, $\bar{x}_2(0) = [5656]'$, $\bar{x}_3(0) = [2121]'$, $\bar{x}_4(0) = [3030]'$, $\bar{u}_1(0) = [606060]'$, $\bar{u}_2(0) = [6060]'$, $\bar{u}_3(0) = [3535]'$ dan $\bar{u}_4(0) = [4545]'$. Tujuan dari pengontrol waktu hijau dengan metode MPC adalah memprediksi waktu hijau secara periodik. Dengan demikian dapat diketahui waktu hijau yang optimal.

```

UUS =

Columns 1 through 6

    35.0000         0    74.3882    74.3882    18.2820     0.0000
    35.0000         0     7.5118     7.5118    63.6180    81.9000
    35.0000         0    73.8125    73.8125    70.5118    31.8486
    35.0000         0     8.0875     8.0875    11.3882    50.0514

Columns 7 through 12

     0.0000     0.0000    23.8324    40.0186    24.5522     0.0000
    81.9000    81.9000    58.0676    41.8814    57.3478    81.9000
    20.8800    52.8913    70.8383    71.7905    70.8807    65.5521
    61.0200    29.0087    11.0617    10.1095    11.0193    16.3479

```

Gambar 4.2: Hasil Simulasi

Hasil simulasi yang terlihat pada Gambar 4.2 menunjukkan bahwa distribusi waktu hijau pada subsistem berada pada 0 sampai dengan 81.9 detik. Dalam hal ini, kendali (waktu hijau) pada subsistem ini dipengaruhi oleh kendali pada subsistem yang lain yakni 1,2,3 dan 4. Sehingga pada distribusi waktu hijau ini diperoleh waktu hijau yang optimal.



"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini disimpulkan hasil dari analisis optimasi waktu hijau dengan metode *Multi-Agent Model Predictive Control* (MPC) pada optimasi waktu hijau pada jaringan lalu lintas perkotaan beserta simulasinya menggunakan *software* MATLAB. Selain itu diberikan saran atau rekomendasi untuk penelitian berikutnya.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil analisis optimasi waktu hijau dengan MPC beserta simulasinya didapatkan simpulan sebagai berikut :

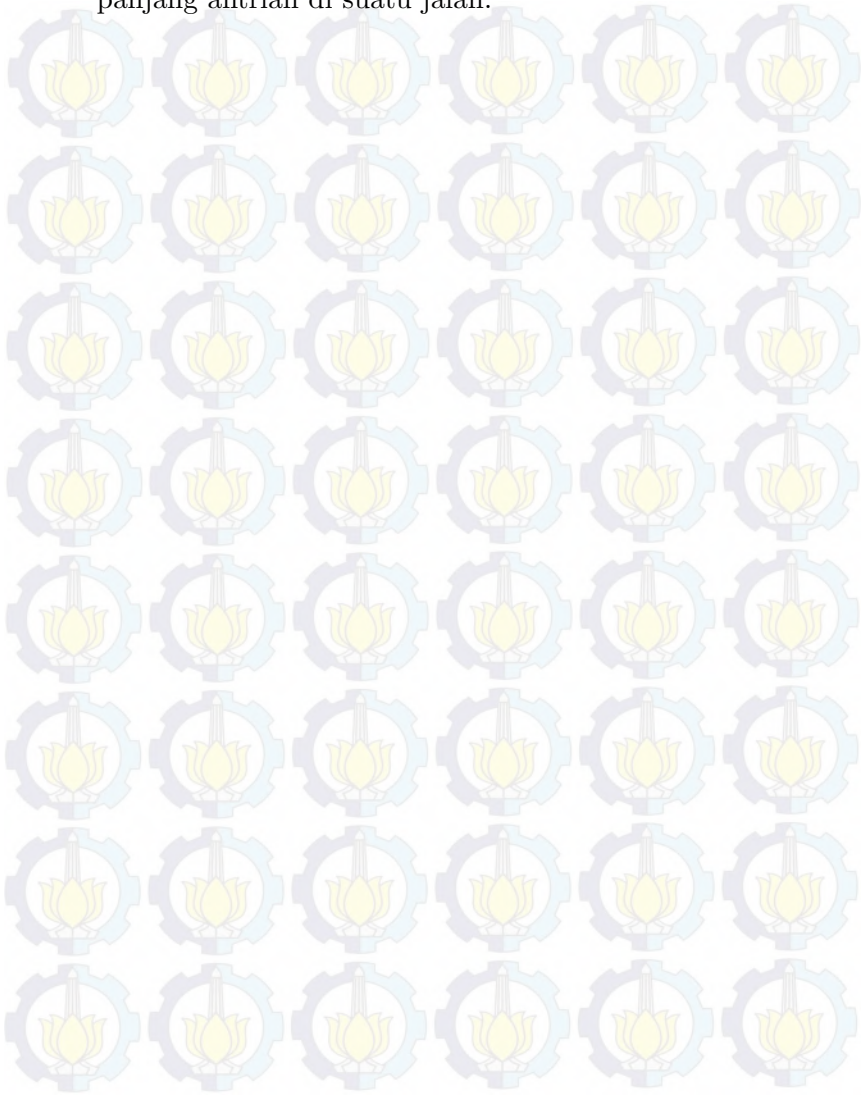
Daerah yang diamati pada tugas akhir ini adalah daerah subsistem 3. Subsistem ini dipengaruhi oleh subsistem 1,2,3 dan 4. Terlihat bahwasanya diperoleh distribusi waktu hijau pada subsistem ini antara 0 sampai dengan 81,9 detik.

5.2 Saran

Saran yang penulis berikan untuk penelitian berikutnya antara lain :

1. Pada tugas akhir ini, penulis hanya mengamati satu subsistem, sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat diamati subsistem yang lain.
2. Pada tugas akhir ini, penulis hanya menggunakan jalan satu arah, sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat digunakan jalan dua arah.
3. Pada tugas akhir ini, penulis mengabaikan lebar jalan pada model jalan, sehingga untuk penelitian selanjutnya

dapat diperhatikan lebar jalan. Sehingga dapat diamati panjang antrian di suatu jalan.



BIODATA PENULIS



Zendhiastara Arthananda atau yang biasa dipanggil Zendhi lahir di Sidoarjo, 26 September 1992. Penulis bertempat tinggal di Jalan Wilis Blok O No. 5 Kepuh Permai, Waru-Sidoarjo. Anak dari pasangan I Gede Yudhi Kartika dan Sudarsih ini memiliki kegemaran membaca serta *travelling*.

Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu SD Al-Falah Darussalam Tropodo Sidoarjo (1999-2005), SMP Al-Falah Deltasari Sidoarjo (2005-2008), dan SMA Negeri 15 Surabaya (2008-2010). Kemudian penulis melanjutkan studinya di S-1 Jurusan Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur PMDK. Selama kuliah, penulis aktif di beberapa organisasi mahasiswa, seperti HIMATIKA ITS (Himpunan Mahasiswa Matematika ITS), BEM FMIPA ITS serta BEM ITS (Badan Eksekutif Mahasiswa ITS). Serta aktif dalam kepanitiaan, salah satunya pernah menjadi PJ (Penanggungjawab) Regional Medan Olimpiade Matematika ITS pada tahun 2013.

Penulis juga pernah menjadi Asisten Dosen kalkulus 1 dan 2 ITS pada tahun 2012. Penulis juga merupakan Mahasiswa Berprestasi 1 Jurusan Matematika pada tahun 2013 serta mewakili Jurusan Matematika ITS dalam ITS Heroes Awards 2014.

Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir, silahkan menghubungi email zendhiez@hotmail.com. Semoga bermanfaat.

